## MATEMÁTICA

**1**

**Uma cooperativa agrícola comercializa três tipos de cestas contendo três diferentes produtos conforme o esquema a seguir:**

- **Cesta A**: Contém 3 kg de tomates, 2 kg de cenoura e 1 kg de pepino, custando R$13,00.
- **Cesta B**: Contém 2 kg de tomates, 2 kg de cenoura e 2 kg de pepino, custando R$12,20.
- **Cesta C**: Contém 3 kg de tomates, 3 kg de cenoura e 1 kg de pepino, custando R$15,50.

**Com base nas informações apresentadas, resolva os itens a seguir.**

**a) Apresente um sistema de equações lineares que modele matematicamente a situação descrita e uma representação matricial que corresponda a este sistema.**

**b) Determine, por meio de métodos de resolução de sistemas lineares (como escalonamento ou substituição), o preço individual do quilograma de cada um dos três produtos comercializados pela cooperativa e que compõem as cestas.**

**Justifique suas respostas apresentando os argumentos e os cálculos realizados na resolução desta questão.**

### QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

**Conteúdo programático:** Sistemas de equações lineares. Matrizes. Determinantes.

**Resposta esperada**

a) Sejam:
$x$ = preço do kg de tomate
$y$ = preço do kg de cenoura
$z$ = preço do kg de pepino

Sistema:
$3x + 2y + z = 13$
$2x + 2y + 2z = 12,20$
$3x + 3y + z = 15,50$

Representação matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,00 \\ 12,20 \\ 15,50 \end{pmatrix}$$

b) Resolução por escalonamento
Subtraindo a 1ª equação da 3ª: $y = 2,50$.

Substituindo $y = 2,50$ na 1ª equação: $3x + z = 8$.

Substituindo $y = 2,50$ na 2ª equação: $2x + 2z = 7,20$, ou $x + z = 3,60$.

Subtraindo as equações: $2x = 4,40$; $x = 2,20$.

Logo: $z = 3,60 - 2,20 = 1,40$.

**Resposta**
Tomate: R$ 2,20/kg
Cenoura: R$ 2,50/kg
Pepino: R$ 1,40/kg

**2**

**Uma empresa especializada em eventos pretende construir um arco decorativo em formato parabólico para a entrada de uma feira. O arco deverá possuir 9 metros de altura máxima e será instalado sobre uma base horizontal com 12 metros de largura.**
**Considere um sistema cartesiano XY em que o ponto médio da base do arco coincide com a origem e o eixo y representa a altura, em metros. Com base nessas informações, resolva os itens a seguir.**

**a) Determine a lei de formação de uma função quadrática que modela o formato do arco nas condições dadas.**

**b) Determine a altura do arco em um ponto situado a 2 metros do centro da base.**

**Justifique suas respostas apresentando os argumentos e os cálculos realizados na resolução desta questão.**

**QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Função do segundo grau. Sistema de equações.

**Resposta esperada**

a) Temos as seguintes informações:

- o arco deverá possuir 9 metros de altura máxima;
- o ponto médio da base do arco coincide com a origem e o eixo $y$ representa a altura das quais concluímos que $f(0) = 9$. Como a distância total da base é 12 metros de largura, concluímos que: $f(6) = f(-6) = 9$.

Assim:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 9$, disso concluímos que $c = 9$
- $f(6) = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 9 = 0$
- $f(-6) = a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + 9 = 0$

**Resolvendo o sistema:**

$$\begin{cases} 36a + 6b = -9 \\ 36a - 6b = -9 \end{cases}$$

$$72a = -18$$
$$a = -\frac{18}{72} = -\frac{1}{4}$$
$$36 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 6b = -9$$
$$-9 + 6b = -9$$
$$6b = 0$$
$$b = 0$$

Disso resulta que a lei de formação pode ser descrita por $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 9$ com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) $f(2) = -\frac{2^2}{4} + 9 = 8$

**Resposta:** a altura do arco parabólico é de 8 metros.

**3**

**Considere uma circunferência $S$ de centro $C(1,1)$ no plano cartesiano e que passa pelos pontos $A(1,0)$, $B(0,1)$ e $D(x,y)$.**
**Com base nessas informações, resolva os itens a seguir.**

a) **Sabendo que o triângulo $BCD$ é equilátero, determine as possíveis coordenadas do ponto $D$.**

b) **Em um mesmo sistema de eixos coordenados, represente os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$, a circunferência $S$ com seu raio e os possíveis triângulos $BCD$.**

**Justifique suas respostas apresentando os argumentos e os cálculos realizados na resolução desta questão.**

**QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** FALTOU INFORMAR O CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

**Resposta esperada**

a) Se a circunferência $S$ tem centro em $(1,1)$ e passa pelos pontos $A(1,0)$ e $B(0,1)$ então $S$ tem raio $r=1$. Por outro lado, os triângulos $BCD$ são equiláteros, assim devemos ter, $d(B,D)=d(D,C)=1$. Ou seja, $d((0,1),(x,y))=d((x,y),(1,1))=1$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-1)^2}=1 \\ \sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ (1-x)^2+(1-y)^2=1 \end{cases}$$

subtraindo ambas as equações, temos:

$$x^2-(1-x)^2=0$$
$$x^2-1+2x-x^2=0$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Substituindo
$x=\frac{1}{2}$ em $x^2+(y-1)^2=1$ temos $(y-1)^2-1+\frac{1}{4}=0$

$$y^2-2y+1-1+\frac{1}{4}=y^2-2y+\frac{1}{4}=0$$
$$y^{'}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\approx 1,86$$
$$y^{''}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\approx 0,27$$

Resposta: As coordenadas do ponto $D$ são $D'\left(\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ e $D''\left(\frac{1}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

Solução alternativa: identificar que os triângulos formados são equiláteros e identificar sua altura, usando teorema de Pitágoras. Ao determinar a altura do triângulo $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$, detecta-se sua coordenada de $y,1$ unidade acima ou uma unidade abaixo

$$y=1+\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ou} \qquad y^{'}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A coordenada $x$ é o deslocamento de $\frac{1}{2}$ unidade no gráfico, portanto $x=\frac{1}{2}$.

b)

